अनुपातः समानुपातः च

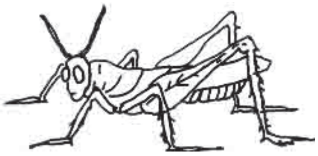
अध्यायः 12

12.1 भूमिका

अस्माकं दैनिकजीवने अनेकवारम् अस्माभिः द्वयोः सदृशराश्योः तुलना करणीया भवति । उदाहरणार्थम् अवनी अपि च शैरी स्व-चित्रपुस्तकस्य कृते पुष्पाणां सङ्ग्रहं कुरुतः। अवनी 30 अपि च शैरी 45 पुष्पाणि सङ्गृहीतवत्यौ।

अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् शैरी अवनीतः 45 - 30 = 15 पुष्पाणि अधिकतया सङ्गृहीतवती।

तथा च, रहीमस्य औन्नत्यं 150 से.मी. अपि च अवन्याः औन्नत्यं 140 से.मी. अस्ति। अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् रहीमस्य औन्नत्यं अवनीतः 150 – 140 = 10 से.मी. अधिकमस्ति।



एषः अन्तरद्वारा तुलनायाः एकः विधिः अस्ति । यदि वयं पिपीलिका-शलभयोः दीर्घतायाः तुलनां कर्तुम् इच्छामः तर्हि अन्तरद्वारा अस्य तुलनायाः प्रदर्शनं समुचितं न भवति । शलभस्य दीर्घता 4 तः 5 सेमी भवति यः पिपीलिकायाः दीर्घतायाः बह्वधिकः अस्ति यतः पिपीलिकायाः दीर्घता कतिचन मिमी एव भवति। तुलना अधिकतया समीचीना भविष्यति यदि शलभस्य दीर्घतया समानाम्, एकस्याः पृष्ठतः एका इव पिपीलिकायाः पङ्क्तिः निर्मिता भवेत् । अनेन वयम् एतत् वक्तुं शक्नुमः यत् 20 अथवा 30 पिपीलिकायाः दीर्घता एकस्य शलभस्य दीर्घतया समानं भवति इति।

अग्रिम-उदाहरणं स्वीकुर्मः, एकस्य कार्-यानस्य मूल्यं 2,50,000 रू. अस्ति अपि च एकस्याः द्विचक्रिकायाः मूल्यं 50,000 रू अस्ति। यदि वयं द्वयोः यानयोः मध्यस्थम् अन्तरं स्वीकुर्मः चेत् तत् 2,00,000 भवति। यदि वयं तुलनां भागद्वारा कुर्मः चेत् इत्थं भवति -

$$\frac{2,50,000}{50,000} = \frac{5}{1}$$

वयं वक्तुं शक्नुमः यत् कार्-यानस्य मूल्यं द्विचक्रिकातः पञ्चगुणितम् अस्ति । कासुचित् स्थितिषु भागद्वारा तुलना, अन्तरद्वारा तोलनात् उपयोगि इति सिद्धं भवति । भागद्वारा तुलना एव अनुपातः इत्युच्यते । अग्रिमभागे वयम् अनुपातस्य विषये इतोऽपि अधिकतया अध्ययनं कुर्मः ।

12.2 अनुपातः

अधस्थं पश्यन्तु ।

ईशायाः भारः 25 किग्रा अस्ति अपि च तस्य पितुः भारः 75 कि.ग्रा. अस्ति । पितुः भारः पुत्र्याः भारात् कियद्गुणितम् अस्ति । एतत् त्रिगुणितम् अस्ति ।

एकस्याः लेखन्याः मूल्यं 10 रू. अस्ति अपि च एकस्याः अङ्कस्याः मूल्यं 2 रू. अस्ति । लेखन्याः मूल्यं अङ्कस्याः मूल्यात् कियद्गुणितम् अस्ति ? स्पष्टम् अस्ति यत् पञ्चगुणितम् ।

उपरि उक्त-उदाहरणेषु वयं द्वयोः राश्योः कियद्गुणितस्य रूपेण तुलनां कृतवन्तः । एषा तुलना अनुपातः इत्युच्यते । वयम् अनुपातं " : " चिह्नद्वारा प्रदर्शयामः ।

पूर्वतन-उदाहरणं पुनः स्वीकुर्मः । वयं वक्तुं शक्नुमः यत्

पितुः भारस्य पुत्र्याः भारेण सह अनुमातः $= \frac{75}{25} = \frac{3}{1} = 3:1$

लेखन्याः मूल्यस्य अङ्कन्याः मूल्येन सह अनुपातः $= \frac{10}{2} = \frac{5}{1} = 5:1$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. एकस्यां कक्ष्यायां 20 बालकाः अपि च 40 बालिकाः सन्ति । बालकानां सङ्ख्यायाः बालिकानां सङ्ख्यया सह कः अनुपातः अस्ति ?
2. रविः एकस्यां होरायां 6 किमी चलति अपरं च रोशनः एकस्यां होरायां 4 कि.मी. चलति । रविद्वारा क्रमितदूरस्य रोशनेन क्रमित दूरेण सह कः अनुपातः अस्ति ?

इमां समस्यां पश्यन्तु ।

एकस्यां कक्ष्यायां 20 बालकाः अपि च 40 बालिकाः सन्ति । अनुपातं जानन्तु

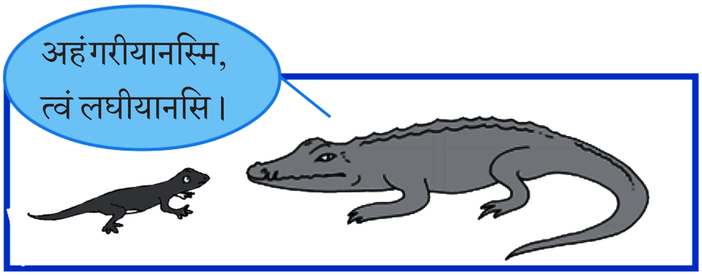
(a) बालिकानां सङ्ख्यायाः आहत्य छात्रैः सह

(b) बालकानां सङ्ख्यायाः आहत्य छात्रैः सह

प्रथमतया अस्माकं कृते छात्राणाम् आहत्य सङ्ख्यायाः आवश्यकता वर्तते या इत्थम् अस्ति । बालिकानां सङ्ख्या + बालकानां सङ्ख्या = 20 + 40 = 60

तदा बालिकानां सङ्ख्यायाः आहत्य छात्राणां संख्यया सह अनुपातः $= \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

भागस्य (b) इत्यस्य समाधानम् समान-प्रकारेण जानन्तु ।



अधोलिखितम् उदाहरणं स्वीकुर्मः ।

गृहे विद्यमान-गोधिकायाः दीर्घता 20 सेमी अस्ति अपि च मकरस्य दीर्घता 4 मीटर् अस्ति।

"अहं भवतः पञ्चगुणिता अस्मि" इति गोधिका अवदत्। यथा वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् एतत्निः संशयम् असमीचीनम् अस्ति। एकस्याः गोधिकायाः दीर्घता एकस्य मकरस्य दीर्घतायाः पञ्चगुणितः भवितुं न अर्हति। तर्हि दोषः कुत्र अस्ति ? अवधानेन पश्यन्तु यत् गोधिकायाः दीर्घता से.मी-मध्ये अस्ति तथा च मकरस्य दीर्घता मीटर्-मध्ये अस्ति। अतः अस्माभिः तयोः दीर्घतां सदृशे घटके परिवर्तनीयं भविष्यति।

मकरस्य दीर्घता = 4 मी = 4 X 100 = 400 सेमी

अतः मकरस्य दीर्घतायाः गोधिकायाः दीर्घतया सह अनुपातः इत्थम् अस्ति

$$= \frac{400}{20} = \frac{20}{1} = 20 : 1$$

द्वयोः राश्योः तुलनां तदा एव भवितुं अर्हति यत् यदा तौ द्वौ अपि एकस्मिन् एव घटके भवेताम्।

गोधिकायाः दीर्घतायाः मकरस्य दीर्घतया सह अनुपातः कः भवेत् ?

एषः भविष्यति $\frac{20}{400} = \frac{1}{20} = 1 : 20$

ध्यानं यच्छन्तु यत् 1 : 20 अपि च 20 : 1 द्वौ अपि एकः अपरात् भिन्नः अस्ति। 1 : 20 गोधिकायाः मकरदीर्घतया सह अनुपातः तथा 20 : 1 मकरस्य गोधिकादीर्घतया सह अस्ति।

एकम् अन्यम् उदाहरणं पश्यामः।

अङ्कन्याः दीर्घता 18 से.मी. अस्ति अपि च अस्य व्यासः 8 मि.मी. अस्ति। अङ्कस्याः व्यासस्य तस्याः दीर्घतया सह अनुपातः कः भविष्यति ? व्यास-दीर्घतयोः धटकः भिन्न-भिन्न-घटकेषु स्तः। दत्तः अस्ति अतः तयोः समानघटके परिवर्तनम् अपेक्षते।

अङ्कन्याः दीर्घता = 18 से.मी. = 18 X 10 मि.मी. = 180 मि.मी.

अङ्कन्याः व्यासस्य तस्याः दीर्घतया सह अनुपातः

$$= \frac{8}{180} = \frac{2}{45} = 2 : 45$$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. सौरभः गृहात् विद्यालयं प्राप्तुं 15 निमेषान् स्वीकरोति अपि च सचिनः एकां होरां स्वीकरोति। सौरभेन स्वीकृतसमयस्य अपि च सचिनद्वारा स्वीकृतसमयस्य च अनुपातं जानन्तु।
2. एकस्य लधुमधुरगोलस्य मूल्यं 50 पणकम् अस्ति तथा एकस्य चाकलेहस्य मूल्यं 10 रूप्यकाणि। लघुमधुरगोलस्य चाकलेहस्य मूल्येन सह अनुपातं जानन्तु।
3. एकस्मिन् विद्यालये एकस्मिन् वर्षे 73 विरामाः भवन्ति। विरामानां वर्षस्य आहत्य दिनैः सह अनुपातं जानन्तु।

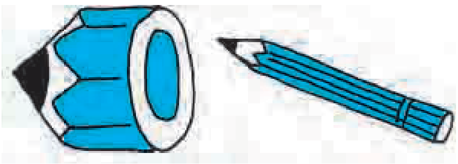
कासाञ्चन एतदृशस्थितीनां विषये चिन्तयन्तु यत्र भवद्भिः द्वयोः समानराश्योः तुलना करणीया भवति तथा द्वयोः राश्योः अपि घटकः भिन्नः अस्ति।

A B

दैनिकजीवनस्य बह्वीषु स्थितिषु वयम् अज्ञात्वा एव अनुपातस्य विषयं प्रयुज्महे।

आकृत्योः A अपि च B इत्यनयोः तुलनां कुर्मः। आकृतिः A , आकृतिः B इत्यतः अधिकतया स्पष्टा अस्ति। किमर्थम् ?

आकृतिः A इत्यत्र पादौ शरीरस्य अन्यभागेभ्यः दीर्घते वर्तेते। एतदर्थम् एवमुच्यते यत् वयं पादयोः शरीरस्य अन्यभागैः सह तुलनायाम् एकं निश्चितानुपातम् आशास्महे।



चित्रे दर्शित द्वयोः अङ्कन्योः तुलनां कुर्वन्तु । किं प्रथमाङ्कनीं द्रष्टुं पूर्णाङ्कनीवत् दृश्यते ? न। किमर्थं न ? कारणम् एतत् अस्ति यत् अङ्कन्याः पीनत्वे अपि च लम्बत्वे समुचितः अनुपातः नास्ति।

वयं भिन्नस्थितिषु सदृशानुपातान् पश्यामः।

एकस्य प्रकोष्ठस्य दीर्घता 30 मी अपि च तस्य वैशाल्यं 20 मी अस्ति। अतः प्रकोष्ठस्य दीर्घतायाः वैशाल्येन सह अनुपातः $= \frac{30}{20} = \frac{3}{2} = 3:2$

एकस्मिन् चारणे 24 तथा च 16 बालकाः गच्छन्तः सन्ति। बालिकानां सङ्ख्यायाः बालकानां सङ्ख्यया सह अनुपातः $= \frac{24}{16} = \frac{3}{2} = 3:2$

न्यूनतमरूपेण 30 : 20 अपि च 24 : 16 अनुपातौ समानौ स्तः अपि च तौ 3 : 2 इत्यनेन समानौ स्तः। एतौ तुल्यानुपातौ इत्युच्येते। किं भवन्तः केषाञ्चन अन्य-उदाहरणानां विषये चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यानि न्यूनतमरूपेण 3 : 2 इत्यनेन समानानि सन्ति ? एतादृशस्थितयः लिख्यन्तां याभिः एकः निश्चितानुपातः लभ्येत, याः रुचिकराः अपि सन्ति।

उदाहरणार्थम् एकां तादृशीं स्थितिं लिखन्तु यस्याम् अनुपातः 2 : 3 अस्ति।

- उत्पीठिकायाः वैशाल्यस्य दीर्घतया अनुपातः 2 : 3 अस्ति।
- शीनायाः समीपे 2 काचमणी स्तः अपि च तस्याः सख्याः शबनमायाः समीपे 3 काचमणयः सन्ति, शीना-शबनमयोः काचमणयोः अनुपातः 2 : 3 अस्ति।

किं भवन्तः कानिचन तादृशानि उदाहरणानि लेखितुं शक्नुवन्ति येषु एषः एव अनुपातः आगच्छेत्। स्व-मित्राणां कृते काञ्चन अनुपातान् दत्वा तैः अनुपाताधारितानि कानिचन उदाहरणानि निर्मापयन्तु।

रविः अपि च रानी एकस्य व्यापारस्य प्रारम्भं कृतवन्तः। 2 : 3 अनुपाते धनस्य निवेशं कृतवत्यौ, एकस्य वर्षस्य अनन्तरं लाभः 40,000 रू. च प्राप्तवन्तौ।

रविः उक्तवान् यत् वयम् अमुं लाभं समानविभागं कुर्मः। रानी उत्तरं दत्तवती यत्, " अहम् अधिकम् इच्छामि यतः अहम् अधिकं निवेशं कृतवती"।

तदा एषः निर्णयः स्वीकृतः यत् निवेशस्य अनुपातानुगुणमेव लाभः विभज्यते।

अत्र 2 : 3 इत्यस्य अनुपाते 2 अपि च 3 द्वौ एव राशी स्तः।

एतेषां राशीनां योगः = 2 + 3 = 5

अस्य कः अर्थः ?

अस्यार्थः अस्ति यत् यदि 5 रू. लाभः अस्ति तर्हि रविना 2 रूप्यकम् अपि च रान्या 3 रूप्यकं प्राप्तव्यम्।

तथा च वयं वक्तुं शक्नुमः यत् 5 भागेषु भागद्वयं रवये भागत्रयं च रान्यै लभ्यते।

अनेन अभिप्रायः भवति यत् रवेः कृते आहत्य लाभस्य $\frac{2}{5}$ भागः अपि च रान्याः कृते $\frac{3}{5}$ भागः लभ्यते।

यदि आहत्य लाभः 500 रू भवति तर्हि

रवये लभ्यते $\frac{2}{5}$ X 500 = 200 रू

रान्यै लभ्यते $\frac{3}{5}$ X 500 = 300 रू

अधुना यदि आहत्यलाभः 40,000 रू. अस्ति तर्हि प्रत्येकं प्रति कियान् भागः लभ्यते ?

रवेः भागः = $\frac{2}{5}$ X 40,000 रू = 16,000 रू

रान्याः भागः = $\frac{3}{5}$ X 40,000 रू = 24,000 रू

किं भवन्तः केषाञ्चन अन्य-उदाहरणानां विषये चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यत् येषु कानिचन वस्तूनि भवद्भिः एकस्मिन् अनुपाते विभज्य वितरणीयानि भवन्ति ? तिस्रः एतादृशसमस्याः निर्मान्तु अपि च स्व मित्रैः सह समाधानं कारयन्तु।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. स्व-स्यूते स्थापितटिप्पणीपुस्तकानां पाठ्यपुस्तकैः सह अनुपातं जानन्तु।
2. स्व-कक्ष्यायाः, आहत्य उत्पीठिकानां सङ्ख्यायाः आहत्य आसन्दानां सङ्ख्यया सह अनुपातं जानन्तु।

3. स्व-कक्ष्यायां तेषां छात्राणां सङ्ख्यां जानन्तु येषाम् आयुः 12 वर्षेभ्यः उपरि वर्तते । अधुना 12 वर्षेभ्यः उपरि आयुर्युक्तानां छात्राणां सङ्ख्यायाः कक्ष्यायाः अन्यच्छात्राणां सङ्ख्यया सह अनुपातं जानन्तु ।
4. स्व-कक्ष्यायाः द्वाराणां सङ्ख्यायाः वातायनानां सङ्ख्यया सह अनुपातं जानन्तु ।
5. एकम् आयतं निर्मान्तु । तस्य दीर्घतायाः वैशाल्येन सह अनुपातं जानन्तु ।

अधुना पर्यन्तं यादृशसमस्यानां समाधानं कर्तुं वयम् अधीतवन्तः ताः पश्यामः ।

उदाहरणम् 1 : एकस्य आयताकारस्य क्रीडाक्षेत्रस्य दीर्घता तथा च वैशाल्यं 50 मी. अपि च 15 मी. अस्ति । क्रीडाक्षेत्रस्य दीर्घतायाः वैशाल्येन सह अनुपातं जानन्तु ।

समाधानम् : आयताकारस्य क्रीडाक्षेत्रस्य दीर्घता = 50 मी

आयताकारस्य क्रीडाक्षेत्रस्य वैशाल्यम् = 15 मी

दीर्घतायाः वैशाल्येन सह अनुपातः = 50 : 15

अनुपातम् अनेन प्रकारेण लेखितुं शक्नुमः $\frac{50}{15} = \frac{50 \div 5}{15 \div 5} = \frac{10}{3}$ =10 : 3

अतः अनुपातः भवति 10 : 3

उदाहरणम् 2 : 90 से.मी. अपि च 1.5 मी इत्यनयोः अनुपातं जानन्तु ।

समाधानम् : द्वौ अपि राशी एकस्मिन्नेव घटके न स्तः । अतः तौ समाने घटके परिवर्तनानन्तरं

1.5 मी. = 1.5 X 100 से.मी. = 150 से.मी.

अतः वाञ्छितानुपातः अस्ति

$90 : 150 = \frac{90}{150} = \frac{90 \div 30}{150 \div 30} = \frac{3}{5}$

अतः वाञ्छितानुपातः 3 : 5

उदाहरणम् 3 : एकस्मिन् कार्यालये 45 कर्मचारिणः कार्यं कुर्वन्ति । महिलानां सङ्ख्या 25 अस्ति, अन्ये पुरुषाः सन्ति । अनुपातं जानन्तु ।

(a) महिलानां सङ्ख्यायाः पुरुषस्य संख्यया सह

(b) पुरुषाणां सङ्ख्यया महिलानां संख्यया सह

समाधानम् : महिलानां सङ्ख्या = 25

कर्मचारिणाम् आहस्य सङ्ख्या = 45

पुरुषाणां सङ्ख्या = 45 – 25 = 20

अतः महिलानां सङ्ख्यायाः पुरुषाणां सङ्ख्यया सह अनुपातः

= 25 : 20 = 5 : 4

अपि च पुरुषाणां सङ्ख्यायाः महिलानां सङ्ख्यया सह अनुपातः

= 20 : 25 = 4 : 5

(ध्यानेन पश्यन्तु यत् 5 : 4 अपि च 4 : 5 इत्यनयोः मध्ये भिन्नता अस्ति ।)

उदाहरणम् 4 : 6 : 4 इत्यस्य तुल्य-अनुपातद्वयं लिखन्तु ।

समाधानम् : अनुपातः $6 : 4 = \frac{6}{4} = \frac{6 \text{ X } 2}{4 \text{ X } 2} = \frac{12}{8}$

अतः, 12 : 8 अपि च 6 : 4 तुल्य-अनुपातौ स्तः।

$$6 : 4 = \frac{6}{4} = \frac{6 \div 2}{4 \div 2} = \frac{2}{3}$$

एवमेव वयं कस्यापि अनुपातस्य अंशम् अपि च भाजकम् एकया समानसंख्यया गुणनेन अथवा विभजनेन तुल्यानुपातं प्राप्नुमः।

6 : 4 इत्यस्य इतोऽपि द्वौ अनुपातौ जानन्तु।

उदाहरणम् 5 : रिक्तस्थानानि पूरयन्तु ।

$$\frac{14}{21} = \frac{\square}{3} = \frac{6}{\square}$$

समाधानम् : प्रथमरिक्तस्थानं पूरयितुं वयं 21 = 3 X 7 तथ्यस्य प्रयोगं करिष्यामः। अर्थात् 21 इत्याख्यं 7 इत्यनेन विभाजनेन 3 प्राप्यते। एतत् दर्शयति यत् अन्यानुपातस्य रिक्तस्थानं पूरयितुं 14 इत्याख्यं 7 इत्यनेन विभाजनीयं भवति। तदा 14 ÷ 7 = 2

अतः द्वितीयानुपातः $\frac{2}{3}$ अस्ति।

अपि च तृतीयानुपातार्थं द्वितीयानुपातस्य द्वौ अपि राशी 3 इत्यनेन गुणनं कर्तव्यं भवति। (किमर्थम् ?)

अतः तृतीयानुपातः $\frac{6}{9}$ अस्ति।

अपि च $\frac{14}{21} = \frac{\boxed{2}}{3} = \frac{6}{\boxed{9}}$ [एते सर्वे अपि तुल्यानुपाताः सन्ति।]

उदाहरणम् 6 : मेर्याः गृहात् विद्यालयपर्यन्तदूरस्य, जानस्य गृहात् विद्यालयपर्यन्तदूरेण सह अनुपातः 2 : 1 अस्ति।

(a) विद्यालयस्य बहुसमीपे कः निवसति ?

(b) अधोदत्तसारिणीं पूरयन्तु या कानिचन सम्भवनीयदूराणि दर्शयति यत्र मेरी अपि च जानः वसितुं शक्नुतः।

मेर्याः गृहात् विद्यालयस्य दूरत्वम् (कि.मी.)	10	☐	4	☐	☐
जानस्य गृहात् विद्यालयस्य दूरत्वम् (किमी)	5	4	2	3	1

(c) यदि मेर्याः गृहात् विद्यालयपर्यन्तदूरस्य, कलामस्य गृहात् विद्यालयपर्यन्तदूरेण सह अनुपातः 1 : 2 भवति चेत् विद्यालयस्य बहुसमीपे कः निवसति ?

समाधानम् : (a) जानः विद्यालयात् बहु समीपे निवसति (यतः अनुपातः 2 : 1 अस्ति)।

(b)

मेर्याः गृहात् विद्यालयस्य दूरम् (कि.मी.)	10	8	4	6	2
जानस्य गृहात् विद्यालयस्य दूरम् (कि.मी.)	5	4	2	3	1

(c) यतो हि अनुपातः 1 : 2 अस्ति अतः मेरी विद्यालयस्य बहुसमीपे निवसति।

उदाहरणम् 7 : कृतिकिरणयोः मध्ये 60 रूप्यकाणि 1 : 2 इत्यस्मिन् विभाज्य वितरन्तु।

समाधानम् : अनुपातस्य द्वौ भागौ 1 अपि च 2 स्तः।

अतः द्वयोः भागयोः योगः = 1 + 2 = 3

अस्यार्थः अस्ति यत् यदि 3 रू. अस्ति चेत् तर्हि कृत्या 1 रू. अपि च किरणेन 2 रू. प्राप्यते।

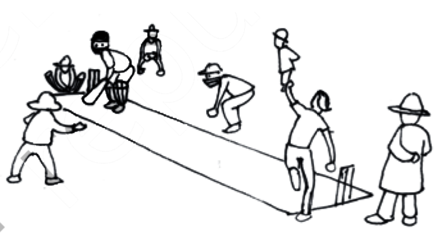
अतः कृत्याः भागः = $\frac{1}{3}$ 60 = 20 रू. अस्ति।

किरणस्य भागः = $\frac{2}{3}$ 60 = 40 रू. अस्ति।

अभ्यासः 12.1

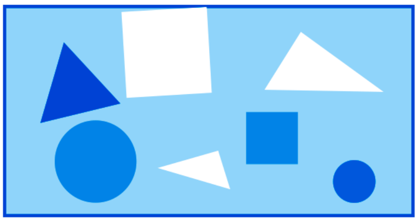
1. एकस्यां कक्ष्यायां 20 बालिकाः अपि च 15 बालकाः सन्ति। अनुपातं जानन्तु।
   (a) बालिकानां सङ्ख्यायाः बालकानां संख्यया सह।
   (b) बालिकानां सङ्ख्यायाः आहस्य छात्राणां संख्यया सह।

2. 30 छात्राणां कक्ष्यायां 6 छात्राः पादकन्दुकम्, 12 छात्राः क्रिकेट्-क्रीडाम्, अन्ये च टेनिस्-क्रीडाम् इच्छन्ति। अनुपातं जानन्तु।



   (a) पादकन्दुक-क्रीडा-इच्छुकानां सङ्ख्यायाः टेनिस् क्रीडा-इच्छुकानां संख्यया सह।
   (b) क्रिकेट्-क्रीडा-इच्छुकानां सङ्ख्यायाः आहत्य छात्राणां संख्यया सह।

3. आकृतिं दृष्ट्वा अनुपातं जानन्तु।



   (a) आयतान्तः विद्यमानानां सर्वेषां त्रिभुजानां सङ्ख्यायाः वृत्तानां संख्यया सह।
   (b) सर्वेषां वर्गाणां सङ्ख्यायाः सर्वासाम् आकृतीनां संख्यया सह।
   (c) वृत्तसङ्ख्यायाः सर्वासाम् आकृतीनां संख्यया सह।

4. हमीदः एवम् अक्तरः एकस्यां होरायां क्रमशः 9 कि.मी. अपि च 12 कि.मी. दूरं क्रमितवन्तौ। हमीद-अक्तरयोः क्रमणस्य अनुपातं जानन्तु।

5. रिक्तस्थानं पूरयन्तु।

   $\frac{15}{\boxed{18}} = \frac{\square}{6} = \frac{10}{\square} = \frac{\square}{30}$ (किम् एते तुल्यानुपाताः सन्ति ?)

6. अनुपातं जानन्तु।
   (a) 81 इति सङ्ख्यायाः 108 इति संख्यया सह
   (b) 98 इति सङ्ख्यायाः 63 इति संख्यया सह
   (c) 33 किमी इत्यस्य 121 किमी इत्यनेन सह
   (d) 30 निमेषाणां 45 निमेषैः सह

7. अनुपातं जानन्तु।

(a) 30 निमेषाणां 1.5 होराभिः सह (b) 40 सेमी इत्यस्य 1.5 मी इत्यनेन सह

(c) 55 पणकानां 1 रूप्यकेण सह (d) 500 मि.ली. इत्यस्य 2 लीटर् इत्यनेन सह

8. एकस्मिन् वर्षे सीमा 1,50,000 रू. अर्जयति अपि च 50,000 रू इत्यस्य संरक्षणं करोति। अधोलिखितानाम् अनुपातं जानन्तु।

(a) सीमया कृतस्य व्ययस्य तस्याः संरक्षित-धनेन सह

(b) सीमया संरक्षितधनस्य तया कृतव्ययेन सह

9. एकस्मिन् विद्यालये 3300 छात्राः 102 अध्यापकाः सन्ति। अध्यापकसङ्ख्यायाः छात्राणां संख्यया सह अनुपातं जानन्तु।

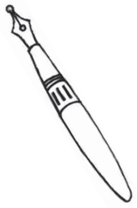
10. एकस्मिन् महाविद्यालये 4320 छात्रेषु 2300 बालिकाः सन्ति। अनुपातं जानन्तु

(a) बालिकानाम् एवम् आहत्यच्छात्राणां सङ्ख्यायाः

(b) बालकबालिकयोः सङ्ख्यायाः

(c) बालकानां तथा आहत्यच्छात्राणां सङ्ख्यायाः

11. एकस्य विद्यालयस्य 1800 छात्रेषु 750 छात्राः बास्केट्-बाल्, 800 छात्राः वल्लृ-कन्दुक-क्रीडा, अन्ये च टेबल्-टेनिस् इत्याख्यां क्रीडां च इच्छन्ति। यदि एकः छात्रः एकाम् एव क्रीडां चिनोति चेत् अनुपातं जानन्तु –



(a) बास्केट्-बाल् क्रीडकानाम् अपि च टेबल्-टेनिस् क्रीडकाणाम्

(b) वल्ल-कन्दुक-क्रीडकानाम् अपि च बास्केट्-बाल् क्रीडकानाम्

(c) बास्केट्-बाल् क्रीडकानाम् एवम् आहत्य छात्राणाम्

12. द्वादश-विशिष्टलेखनीनां मूल्यं 180 रू अस्ति अपि च 8 सामान्य-लेखनीनां मूल्यं 56 रू अस्ति। विशिष्टलेखनीनां सामान्यलेखनीभिः सह अनुपातं जानन्तु।

13. कथनं पश्यामः– एकस्य प्रकोष्ठस्य वैशाल्यस्य अपि च दीर्घतायाः अनुपातः 2 : 5 अस्ति। अधोलिखित-सारिणीं पूरयन्तु यत्र प्रकोष्ठस्य केचन सम्भवनीयवैशाल्य-दीर्घताः दत्ताः सन्ति।

14. शीला-सङ्गीतयोः मध्ये 20 लेखनीः 3 : 2 इत्यस्मिन् विभज्य वितरन्तु।

प्रकोष्ठस्य वैशाल्यम् (मी)	10		40
प्रकोष्ठस्य दीर्घता (मी)	25	50	

15. एका माता स्वपुत्रीभ्यां श्रेया-भूमिकाभ्यां 36 रूप्यकाणि तयोः आयुषः अनुपाते दातुम् इच्छति। यदि श्रेया 15 वर्षीया भूमिका 12 वर्षीया अस्ति तर्हि प्रत्येकं पुत्र्याः कृते कियद् धनं लप्स्यते ?

16. पिता 42 वर्षीयः अस्ति अपि च तस्य पुत्रः 14 वर्षीयः अस्ति। अनुपातं जानन्तु।

(a) पितुः आयुषः पुत्रस्य आयुषा सह।

(b) पितुः आयुषः पुत्रस्य आयुषा सह यदा पुत्रः 12 वर्षीयः आसीत्।

(c) 10 वर्षेभ्यः अनन्तरं पितुः आयुषः 10 वर्षेभ्यः अनन्तरस्य पुत्रस्य आयुषा सह।

(d) पितुः आयुषः पुत्रस्य आयुषा सह यदा पिता 30 वर्षीयः आसीत्।

12.3 समानुपातः

इमां स्थितिं पश्यामः –

राजूः रक्ताङ्गं क्रेतुं विपणीं गच्छति। एकः आपणिकः उक्तवान् यत् 5 कि.ग्रा. रक्ताङ्गस्य मूल्यं 40 रू. अस्ति। अपरः आपणिकः उक्तवान् यत् 6 कि.ग्रा. रक्ताङ्गस्य मूल्यं 42 रू. अस्ति। इदानीं राजू-इत्यनेन किं करणीयम् अस्ति ? प्रथमात्-आपणिकात् रक्ताङ्गः क्रेतव्यः अथवा द्वितीयात् आपणिकात्? निर्णयं स्वीकर्तुं किम् अन्तर-द्वारा-तुलनासाहाय्यं करिष्यति ? न। किमर्थं न ?

तस्य साहाय्यार्थं कमपि मार्गं चिन्तयन्तु। स्व-मित्रैः सह विमर्शं कुर्वन्तु। एकम् अन्यम् उदाहरणं स्वीकुर्मः।

भाविकायाः पार्श्वे 28 काचमणयः सन्ति अपि च विनि इत्यस्याः पार्श्वे 180 पुष्पाणि सन्ति। ते द्वे अपि परस्परं वितरितुम् इच्छतः। भाविका 14 मणीन् विनि इत्यस्यै दत्तवती अपि च विनिः 90 पुष्पाणि भाविकायै दत्तवती। परन्तु विनिः सन्तुष्टा न अभवत्। सा चिन्तितवती यत् सा भाविकायै अधिकानि पुष्पाणि दत्तवती अपरं च भाविका तस्यै न्यूनान् काचमणीन् दत्तवती।

किं भवन्तः चिन्तयन्ति ? किं विनिः सम्यक् चिन्तयति ? द्वे अपि समस्यायाः समाधानार्थं विन्याः मातुः पूजायाः समीपे गतवत्यौ।

पूजा बोधितवती यत् 28 काचमणिषु भाविका 14 काचमणीन् विनि इत्यस्यै दत्तवती।

अतः अनुपातः अस्ति यत् $14 : 28 = 1 : 2$

अपि च 180 पुष्पेषु 90 पुष्पाणि विनिः भाविकायै दत्तवती।

अतः अनुपातः अस्ति यत् $90 : 180 = 1 : 2$

यतः द्वौ अपि अनुपातौ समानौ वर्तेते अतः वितरणं सम्यक् अस्ति।

आशमा अपि च पङ्खुरी केशसन्दंशिकां (हेर्-क्लिप्) क्रेतुम् आपणं गतवत्यौ। ते 30 रूप्यकेषु 20 सन्दंशिकां क्रीतवत्यौ। आशमा 12 दत्तवती अपि च पङ्खुरी 18 रू दत्तवती। गृहं प्रति आगमनानन्तरं आशमा पङ्खुरीं 10 सन्दंशिकाः दातुम् उक्तवती। तदा पङ्खुरी उक्तवती यत् "अहम् अधिकं धनं दत्तवती अतः मया अधिकसन्दंशिकाः प्राप्तव्याः इति"। पङ्खुर्याः अनुसारं आशमया 8 अपि च तया 12 च सन्दंशिकाः प्राप्तव्याः।

किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् आशमापङ्खुर्योः मध्ये का समीचीनं वदति ? किमर्थम् ?

आशमया दत्तधनस्य पङ्खुर्या दत्तधनस्य च अनुपातः $= 12 : 18 = 2 : 3$ अस्ति। आशमायाः वचनानुसारम्,

आशमायाः केशसन्दंशिकानां सङ्ख्यायाः अपि च पङ्खुर्याः केशसन्दंशिकानां सङ्ख्यायाः अनुपातः $10 : 10 = 1 : 1$

पङ्खुर्याः वचनानुसारम्,

आशमायाः केशसन्दशिकानां सङ्ख्यायाः अपि च पङ्खुर्याः केशसन्दंशिकानां सङ्ख्यायाः च अनुपातः = 8 : 12 = 2 : 3 अस्ति।

आशमया कृतवितरणानुसारं सन्दंशिकानां सङ्ख्यायाः अनुपातः, दत्तानुपातेन समानः नास्ति, यः भवितव्यः आसीत्। अपरं च पङ्खुर्या कृतवितरणे द्वयोः अपि स्थित्योः अनुपातः समानः अस्ति। अतः पङ्खुरी समानवितरणं कृतवती।

अनुपातवितरणस्य कोऽपि अर्थः अस्ति

अधस्थ-उदाहरणानि पश्यामः –

- राजा 15 रूप्यकेषु 3 लेखनीः क्रीतवान् एवम् अनुः 50 रूप्यकेषु 10 लेखनीं क्रीतवती। कस्य लेखन्याः अधिकं मूल्यम् आसीत् ? राज्ञा क्रीतलेखनीनां सङ्ख्या एवम् अनुना क्रीतलेखनीनां सङ्ख्यायाः अनुपातः = 3 : 10।

  तासां मूल्यानाम् अनुपातः = 15 : 50 = 3 : 10

  3 : 10 अपि च 15 : 50 समानौ स्तः।

- रहीमः 60 रूप्यकेषु 2 किग्रा सेवं विक्रीतवान् अपि च रोशनः 120 रूप्यकेषु 4 कि.ग्रा. विक्रीतवान्। कः बहुमूल्येन सेवं विक्रीतवान् ?

  सेवफलानां भारयोः अनुपातः 2 कि.ग्रा : 4 किग्रा = 1 : 2

  मूल्ययोः अनुपातः = 60 : 120 = 6 : 12 = 1 : 2

  अपि च सेवानां भारयोः अनुपातः = मूल्ययोः अनुपातः

  यतः द्वयोः अपि अनुपातः समानः अस्ति। अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् एतौ समानुपाते स्तः। तौ द्वौ अपि समानमूल्येषु सेवविक्रयणं कुर्वन्तौ आस्ताम्।

यदि द्वौ अनुपातौ समानौ भवतः तर्हि तौ द्वौ अपि समानुपाते स्तः अपि च तौ समानौ कर्तुं '::' अथवा '=' चिह्नस्य प्रयोगः क्रियते।

प्रथम-उदाहरणार्थं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् 3, 10, 15 अपि च 20 एताः सङ्ख्याः समानुपाते सन्ति याः वयं 3 : 10 :: 15 : 50 इति रूपे अपि लेखितुं शक्नुमः। अपि च 3 अनुपातः 10 समः 15 अनुपातः 50 इति पठामः।

द्वितीय-उदाहरणे 2, 4, 60 अपि च 120 एताः सङ्ख्याः समानुपाते सन्ति याः वयं 2 : 4 :: 60 : 120 इति लेखिष्यामः अपि च 2 अनुपातः 4 समः 60 अनुपातः 120 इति पठिष्यामः।

आयान्तु, अन्यानि उदाहरणानि स्वीकुर्मः –

कश्चन होराद्वये 35 कि.मी. चलति। किम् एतावता वेगेन एषः 4 होरासु 70 कि.मी. चलितुं शक्नोति ?

द्वयोः चलितदूरयोः अनुपातः = 35 : 70 = 1 : 2

द्वयोः स्वीकृतसमययोः अनुपातः = 2 : 4 = 1 : 2

इत्थम्, द्वौ अपि अनुपातौ समानौ स्तः। अर्थात् 35 : 70 = 2 : 4

अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् चतस्रः सङ्ख्याः 35, 70, 2 अपि च 4 समानुपाते सन्ति।

इत्थं वयं लेखितुं शक्नुमः यत् 35 : 70 :: 2 : 4 एवम् इदम् अपि च पठामः यत् 35 अनुपातः 70 समः 2 अनुपातः 4 इति। अतः सः 4 होरासु 70 किमी तेनैव वेगेन चलितुं शक्नोति।

अधुना तत् उदाहरणं स्वीकुर्मः

2 किग्रा सेवस्य मूल्यं 60 रू अस्ति अपि च 5 किग्रा दृढबीजस्य मूल्यं 15 रू अस्ति।

द्वयोः भारयोः अनुपातः = 2 : 5 अस्ति।

द्वयोः मूल्ययोः अनुपातः = 60 : 15 = 4 : 1

अत्र 2 : 5 अपि च 60 : 15 एतत् द्वयं समानं नास्ति।

अर्थात् $2:5 \neq 60:15$

इत्थं 2, 5, 60 अपि च 15 एते चत्वारः अपि राशयः समानुपाते न सन्ति।

यदि द्वौ अनुपातौ समानुपाते न भवतः तर्हि ते राशयः समानुपाते न सन्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

परीक्षणं कुर्वन्तु यत् दत्तानुपाताः समानाः सन्ति अर्थात् ते समानुपाते सन्ति। यदि आम्, तर्हि तान् समीचीनतया लिखन्तु।

1. 1 : 5 अपि च 3 : 15
2. 2 : 9 अपि च 18 : 81
3. 15 : 45 अपि च 5 : 25
4. 4 : 12 अपि च 9 : 27
5. 10 रूप्यकाणां 15 रूप्यकैः सह अपि च 4 इत्यस्य 6 इत्यनेन सह

समानुपातस्य कथने क्रमे स्वीकृताः चत्वारः राशयः पदानि इत्युच्यन्ते। प्रथमचतुर्थपदे चरमपदे इत्युच्येते। द्वितीयतृतीयपदे मध्यपदे इत्युचेते।

उदाहरणार्थं 35 : 70 :: 2 : 4

35 , 70, 2 अपि च 4 चत्वारि पदानि सन्ति। येषु 35 अपि च 4 चरमपदे स्तः। 70 अपि च 2 मध्यपदे स्तः।

उदाहरणम् 8 : किम्, अनुपातः 25 ग्रा : 30 ग्रा. अपि च 40 किग्रा : 48 कि.ग्रा. समानुपातः अस्ति ?

समाधानम् : 25 ग्रा : 30 ग्रा. $= \frac{25}{30} = 5:6$

40 किग्रा : 48 कि.ग्रा. $= \frac{40}{48} = 5:6$

अतः 25 : 30 = 40 : 48

अतः अनुपातः 25 ग्रा : 30 ग्रा अपि च 40 कि.ग्रा : 48 किग्रा समानुपातः अस्ति

अर्थात् 25 : 30 :: 40 : 48

एतेषु 25,48 चरमपदे स्तः अपि च 30,40 मध्यपदे स्तः।

उदाहरणम् 9 : किं 30, 40, 45 अपि च 60 समानुपाताः सन्ति ?

समाधानम् : 30 अपि च 40 इत्यनयोः अनुपातः = $\frac{30}{\boxed{40}}$ = 3 : 4

45 अपि च 60 इत्यनयोः अनुपातः $\frac{45}{\boxed{60}}$ = 3 : 4

यतः 30 : 40 = 45 : 60

अतः 30, 40, 45, 60 समानुपाते सन्ति।

उदाहरणम् 10 : किं 15 सेमी इत्यस्य 2 मी इत्यनेन सह अपि च 10 क्षणानां 3 निमेषैः सह अनुपातः एकः समानुपातः भवति ?

समाधानम् : 15 से.मी. इत्यस्य 2 मी. इत्यनेन सह अनुपातः

= 15 : 2 X 100 (1 मी = 100 सेमी)

= 3 : 40

10 क्षणानां 3 निमिषैः सह अनुपातः

= 10: 3 X 60 (1 निमेषः = 60 क्षणाः)

= 1 : 18

यतः 3 : 40 $\neq$ 1 : 18, अतः दत्तानुपातः, समानुपातः न भवति।

अभ्यासः 12.2

1. किम् अधोलिखितराशयः समानुपाते सन्ति ?

(a) 15, 45, 40, 120 (b) 33, 121, 9, 96 (c) 24, 28, 36, 48

(d) 32, 48, 70, 210 (e) 4, 6, 8, 12 (f) 33, 44, 75, 100

2. अधोलिखितकथनानाम् अग्रे सत्यम् अथवा असत्यम् इति लिखन्तु।

(a) 16 : 24 :: 20 : 30 (b) 21 : 6 :: 35 : 10 (c) 12 : 18 :: 28 : 12

(d) 8 : 9 :: 24 : 27 (e) 5.2 : 3.9 :: 3 : 4 (f) 0.9 : 0.36 :: 10 : 4

3. किम् अधोलिखितकथनानि सत्यमस्ति ?

(a) 40 जनाः : 200 जनाः :: 15 रू : 75 रू

(b) 7.5 ली : 15 ली :: 5 किग्रा : 10 किग्रा

(c) 99 किग्रा : 45 किग्रा :: 44 रू : 20 रू

(d) 32 मी : 64 मी :: 6 क्षणाः : 12 क्षणाः

(e) 45 किमी : 60 किमी :: 12 होराः : 15 होराः

4. परीक्षणं कुर्वन्तु यत् अधोलिखितानुपाताः समानुपातान् निर्मान्ति वा इति। यदि समानुपाताः भवन्ति तर्हि चरमपदम् अपि च मध्यपदं लिखन्तु।

(a) 25 से.मी. : 1 मी :: 40 रू. : 160 रू.

(b) 39 ली. : 65 ली. :: 6 कूप्यः : 10 कूप्यः

(c) 2 किग्रा : 80 कि.ग्रा. :: 25 ग्रा. : 625 ग्रा.

(d) 200 मि.ली. : 2.5 ली :: 4 रू. : 50 रू.

12.4 घटकीकरणविधिः

प्रदत्तस्थितीः पश्यन्तु ।

- रेशमा अपि च सीमा अभ्यासपुस्तकं क्रेतुं आपणं गच्छतः । रेशमा 24 रूप्यकेषु 2 अभ्यासपुस्तकं क्रीतवती । एकस्य अभ्यासपुस्तकस्य मूल्यं जानन्तु ।
- 80 कि.मी. दूरं क्रमितुं द्विचक्रिकायाः कृते 2 लीटर् पेट्रोल्-तैलम् अपेक्षते । 1 कि.मी. दूरं क्रमितुं कियत् पेट्रोल्-तैलम् अपेक्षते ?

भवन्तः कथम् एतयोः समाधानं कुर्वन्ति ?

प्रथमोदाहरणं पुनः स्वीकुर्मः ।

2 अभ्यासपुस्तकयोः मूल्यं = 24 रू.

अतः 1 अभ्यासपुस्तकस्य मूल्यं = 24 रू. ÷ 2 = 12 रू.

यदि भवन्तः 5 एतादृशाभ्यासपुस्तकानां मूल्यं ज्ञातुं उच्यते चेत् इत्थं भवति 12 रू. X 5 = 60 रू. भविष्यति ।

अन्यम् उदाहरणमपि पुनः स्वीकुर्म ।

वयं ज्ञातुम् इच्छामः यत् 1 कि.मी. गमने कियत्-पेट्रोल् अपेक्षते इति ।

80 कि.मी. गमनार्थं पेट्रोल्-तैलम् अपेक्षते = 2 लीटर्

1 कि.मी. गमनार्थं पेट्रोल-तैलम् अपेक्षते $= \frac{2}{80} = \frac{1}{40}$ लीटर्

अधुना पुनः भवन्तः पृच्छन्ति यत् 120 किमी गमनार्थं कियत् पेट्रोल्-तैलम् अपेक्षते इति चेत्,

तदा आवशकपेट्रोल्-तैलम् $= \frac{1}{40}$ X 120 = 3 लीटर्

यस्य साहाय्येन वयं एकस्य घटकस्य मानं जानीमः अपि च पुनः यावतां घटकानां मानं ज्ञातुम् उच्यामहे, तान् वयं जानीमः सः विधिः घटकीकरणविधिः इत्युच्यते ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. पञ्च एतादृशसमास्याः निर्मान्तु अपि च स्वमित्रैः सह समाधानं कुर्वन्तु ।
2. अधोलिखितसारिणीं पठित्वा पूरयन्तु ।

समयः	करणेन क्रमितदूरम्	कृत्या क्रमितदूरम्
2 होरा	8 किमी	6 किमी
1 होरा	4 किमी	
4 होरा		

करणेन 1 होरायां क्रमितदूरं $= \frac{8}{2}$ कि.मी. = 4 किमी

अतः करणेन 4 होरासु क्रमितदूरं = 4 X 4 = 16 कि.मी.

इत्थम्, कृत्या एकस्यां होरायां क्रमितदोरं ज्ञात्वा, 4 होरासु क्रमितदूरं ज्ञातुं शक्यते ।

उदाहरणम् 11 : यदि 6 फलरसकूपीनां मूल्यम् 210 रू. भवति चेत् 4 कूपीनां मूल्यं जानन्तु ।

समाधानम् : 6 फलरसकूपीनां मूल्यम् = 210 रू

अतः, फलरसस्य 1 कूप्याः मूल्यम् $= \frac{210}{6}$ = 35 रू.

अतः फलरसस्य 4 कूपीनां मूल्यम् = 35 रू. X 4 = 140 रू.

इत्थम्, फलरसस्य 4 कूपीनां मूल्यम् 140 रू. भविष्यति ।

उदाहरणम् 12 : एकया द्विचक्रिकया 220 कि.मी. दूरं क्रमितुं 5 लीटर् पेट्रोल्-तैलम् अपेक्षते चेत् तर्हि 1.5 ली पेट्रोल्-तैले कियद्दूरं क्रमितुं शक्यते ?

समाधानम् : 5 लीटर् पेट्रोल्-तैलेन द्विचक्रिकया क्रमितदूरम् = 220 कि.मी.

1 लीटर् पेट्रोल्-तैलेन द्विचक्रिकया क्रमितदूरम् $= \frac{220}{5}$ कि.मी.

1.5 लीटर् पेट्रोल्-तैलेन द्विचक्रिकया क्रमितदूरम्

$\frac{220}{5} \times 1.5 = \frac{220}{5} \times \frac{15}{10}$ कि.मी. = 66 कि.मी.

उदाहरणम् 13 : द्वादश स्नानफेनकानाम् एकस्याः पेटिकाः मूल्यम् 153.60 रू. अस्ति । एवमेव 15 स्नानफेनकानां पेटिकायाः मूल्यं जानन्तु ।

समाधानम् : द्वादश स्नानफेनकानाम् एकस्याः पेटिकायाः मूल्यम् = 153.60 रू

अतः, एकस्य स्नानफेनकस्य मूल्यम् $= \frac{153.60}{12}$ = 12.80 रू

अतः, 15 स्नानफेनकानां मूल्यम् = 12.80 रू. X 15 = 192 रू

इत्थम्, 15 स्नानफेनकानां पेटिकायाः मूल्यम् 192 रू.

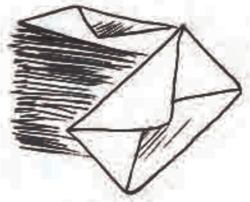
उदाहरणम् 14 : 105 पिहितपत्राणां मूल्यम् 35 रू. अस्ति । 15 रूप्यकेषु कियन्ति पत्राणि क्रेतुं शक्यते ?

समाधानम् : 35 रूप्यकेषु क्रेष्यमाणपिहितपत्राणां सङ्ख्या = 105

अतः, 1 रूप्यके क्रेष्यमाणपत्राणां सङ्ख्या $= \frac{105}{35}$

अतः, 10 रूप्यकेषु क्रेष्यमाणपिहितपत्राणां सङ्ख्या = $\frac{105}{35}$ X 10 = 30

इत्थम्, 10 रूप्यकेषु 30 पिहितपत्राणि क्रेतुं शक्यते।



उदाहरणम् 15 : एकं कार्-यानं $2\frac{1}{2}$ होरायां 90 कि.मी. चलितुं शक्नोति।

(a) तेनैव वेगेन 30 किमी चलितुं कियान् समयः अपेक्षते ?

(b) तेनैव वेगेन 2 होरायां कियद्दूरं गमिष्यति ?

समाधानम् : (a) प्रथम-स्थित्यां दूरं ज्ञातम् अस्ति समयः अज्ञातः अस्ति। अतः वयम् इत्थं कुर्मः।

$2\frac{1}{2}$ होरा = $\frac{5}{2}$ होरा = $\frac{5}{2}$ X 60 निमेषाः = 150 निमेषाः

90 कि.मी. क्रमितुम् अपेक्षितः समयः = 150 निमेषाः

अतः, 1 कि.मी. दूरं क्रमितुम् अपेक्षितः समयः = $\frac{150}{90}$ निमेषाः

अतः, 30 कि.मी. दूरं क्रमितुम् अपेक्षितः समयः = $\frac{150}{90}$ X 30 निमेषाः

= 50 निमेषाः

इत्थम्, 30 कि.मी. दूरं क्रमितुम् अपेक्षितः समयः 50 निमेषाः भविष्यति।

(b) अस्यां द्वितीयस्थित्यां दूरम् अज्ञातम् अस्ति तथा च समयः ज्ञातः अस्ति। अतः एवमग्रे

$2\frac{1}{2}$ होरा = $\frac{5}{2}$ होरा

$\frac{5}{2}$ होरासु क्रमितदूरत्वम् = 90 किमी

अतः, 1 होरायां क्रमितदूरत्वम् = 90 ÷ $\frac{5}{2}$ किमी

= 90 X $\frac{2}{5}$ किमी = 36 किमी

अतः, 2 होरायां क्रमितदूरत्वम् = 36 X 2 = 72 किमी

इत्थम्, 2 होरायां 72 कि,मी. दूरं क्रमितमस्ति।

अभ्यासः 12.3

1. यदि 7 मी वस्त्रस्य मूल्यं 294 रू. भवेत् तर्हि 5 मी वस्त्रस्य मूल्यं जानन्तु।
2. एकाता 10 दिनेषु 1500 रू. अर्जयति। 30 दिनेषु सा कियद्धनम् अर्जयति ?
3. यदि गतदिनत्रयेषु 276 मि.मी. वृष्टिः अभविष्यत तर्हि एकस्मिन् सप्ताहे (7) कियत् से.मी. वृष्टिः भविष्यति ? परिगणयन्तु यत् वृष्ट्याः गतिः समाना अस्ति।

4. 5 कि.ग्रा. गोधूमस्य मूल्यं 30.50 रू. अस्ति।

   (a) 8 किग्रा गोधूमस्य मूल्यं कियद्भवति ?

   (b) 61 रूप्यकेषु कियत् गोधूमं क्रेतुं शक्यते ?

5. गत 30 दिनेभ्यः तापमानं 15°C अस्ति। यदि तापमानम् एवमेव अग्रे अपि भवेत् चेत् अग्रिमेषु 10 दिनेषु तापमानं कति डिग्री भविष्यति ?

6. शैना 3 मासानां भाटकार्थं 7500 रू. ददति। यदि सम्पूर्णवर्षस्य भाटकं समानं भवेत् तर्हि एकस्य वर्षस्य भाटकं कियद् भवति ?

7. 4 दर्जनस्य (dozen) कदलीफलानां मूल्यं 60 रू. अस्ति। 12.50 रूप्यकेषु कियन्ति कदलीफलानि क्रेतुं शक्यते ?

8. 72 पुस्तकानां भारः 9 कि.ग्रा. अस्ति। एतादृशानां 40 पुस्तकानां भारः कियान् भवति ?

9. एकस्मिन् ट्रक्-यानेन 594 किमी चलितुं 108 लीटर् डीसल्-तैलम् अपेक्षते। 1650 कि.मी. दूरं क्रमितुं कियत् लीटर् शिलातैलम् अपेक्षते ?

10. राजूः 150 रूप्यकेषु 10 लेखनीः क्रीतवान् अपि च मनीषः 84 रूप्यकेषु 7 लेखनीः क्रीतवान्। जानन्तु यत् कः न्यूनमूल्येन-लेखनीः क्रीतवान् ?

11. अनीशः 6 ओवर् (over) इत्यस्मिन् 42 धावनाङ्कान् आकलयत्। अनूपः 7 ओवर् इत्यस्मिन् 63 धावनाङ्कान् आकलयत्। एकस्मिन् ओवर्-मध्ये कः अधिक-धावनाङ्कानाम् आकलनं कृतवान् ?

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः ?

1. सदृशराशीनां तोलनं कर्तुं वयं साधारणतया अन्तरद्वारा तोलनं कुर्मः।

2. अधिकस्थितिषु विभजनद्वारा तुलना अधिकसमीचीना भवति। अर्थात् एकः राशिः अपरराशेः कियद्गुणितः अस्ति। अमुं विधिं विभजनद्वारा तोलनम् इति वदामः। उदाहरणार्थम्, ईशायाः भारः 25 कि.ग्रा., तस्याः पितुः भारः 75 कि.ग्रा. अस्ति। वयं वदामः यत् पितुः भारस्य ईशायाः भारेण सह अनुपातः 3 : 1 अस्ति।

3. अनुपातद्वारा तोलने द्वयोः राश्योः तोलनं समानं भवेत्। यदि तौ समानौ न स्यात् तर्हि अनुपातस्वीकारात् पूर्वं तौ समानौ कर्तव्यौ।

4. पृथक्-स्थितिषु अनुपातः समानः भवितुम् अर्हति।

5. अनुपातौ 3 : 2 अपि च 2 : 3 इत्येतौ परस्परं भिन्नौ स्तः। इत्थम्, येन क्रमेण राशयः स्वीकृताः सन्ति सः क्रमः महत्त्वपूर्णः भवन्ति।

6. एकम् अनुपातं भिन्नः इत्यपि मन्तुं शक्यते, अतः $10 : 3 = \frac{10}{3}$ अस्ति।

7. द्वौ अनुपातौ समानौ भविष्यतः, यदि तयोः सङ्गतभिन्नः अपि समानः भवेत्। अतः 3 : 2 इति 6 : 4 अथवा 12 : 8 इत्यस्य समानः अस्ति ।

8. अनुपातं न्यूनतमरूपे परिवर्तयितुं शक्यते । उदाहरणार्थम्, अनुपातः 50 : 15 इत्याख्यं $\frac{50}{15}$ इत्यपि लेखितुं शक्यते । अपि च न्यूनतमरूपेण $\frac{50}{15} = \frac{10}{3}$ अस्ति । इत्थम्, न्यूनतमरूपेण 50 : 15 = 10 : 3 अस्ति ।

9. यदि प्रथम-द्वितीयराश्योः अनुपातः तृतीय-चतुर्थराश्योः अनुपातेन समानः भवेत् तर्हि चत्वारः राशयः समानुपाते सन्ति इति कथ्यते । इत्थम्, 3, 10, 15, 50 समानुपाते सन्ति यतो हि $\frac{3}{10} = \frac{15}{50}$ अस्ति । वयं समानुपातं 3 : 10 :: 15 : 50 इत्यनेन रूपेण दर्शयिष्यामः तथा 3 अनुपातः 10 समः 15 अनुपातः 50 इति रूपेण पठिष्यामः । उपरि लिखितसमानुपाते 3 अपि च 50 चरमपदे स्तः । तथा 10 अपि च 15 मध्यपदे स्तः ।

10. समानुपाते क्रमः महत्त्वपूर्णः अस्ति । 3, 10, 15, 50 समानुपाते सन्ति किन्तु 3, 10, 50, 15 समानुपाते न सन्ति । यतो हि $\frac{3}{10} \neq \frac{50}{15}$ अस्ति ।

11. येन विधिना वयम् एकं घटकस्य मानं जानीमः तदनन्तरं वाञ्छितघटकानां मानं जानीमः तं विधिं घटकीकरणविधिः इति निर्दिशामः । भावयन्तु यत् 6 सङ्ग्राहकाणां मूल्यं 210 रू. अस्ति । 4 सङ्ग्राहकाणां मूल्यं घटकीकरणविधिना ज्ञातुं पूर्वं वयम् एकस्य सङ्ग्राहकस्य मूल्यं ज्ञास्यामः यत् $\frac{210}{6}$ रू. अथवा 35 रू. भविष्यति । अनेन वयं 4 सङ्ग्राहकाणां मूल्यं 35 रू. X 4 अथवा 140 रू. इति प्राप्स्यामः ।